طرق تدريس رياضيات

الفرقة الثالثة – كلية التربية – شعبة الرياضيات

ترم أول

استراتيجيات البرهان الاستدلالي

إن البرهان – كمفهوم ناضج في الرياضيات – يعني سلسلة من التقارير المتصلة والموجهة نحو إثبات صحة استنتاج ما، ويمكن برهنة استنتاج ما بالإشارة إلى مسلمات معترف بها ومقبولة – (بما في ذلك مسلمات المنطق) – وتعاريف وألفاظ وقضايا سبق إثبات صحتها – (بما في ذلك قضايا المنطق) – أو خليط من كل هذه الأسباب.

ويسمى هذا النوع من البرهان برهاناً استدلالياً، وهناك عدة استراتيجيات للبرهان الاستدلالي؛ نلخصها فيما يلي:

(01) استراتيجية المثال الضاد / المثال المدحض:

وتستخدم هذه الاستراتيجية في إثبات خطأ افتراض ما.

مثال: إذا افترض طالب أن Sin(a+b)=Sin(a)+Sin(b) بصفة عامة، فيمكن إثبات خطأ هذا الافتراض ببيان أن Sin(75) لا تساوي Sin(45)+Sin(30) وذلك عن طريق إيجاد قيمة الجيب لكل زاوية منهم.

(02) استراتيجية فصل المقدمة:

هذه الاستراتيجية تستخدم المسلمة المنطقية $(a \rightarrow b) \wedge a \rightarrow b$

مثال: إذا كان في شكل رباعي كل ضلعين متقابلين متوازيان فإن هذا الشكل يكون متوازي أضلاع.

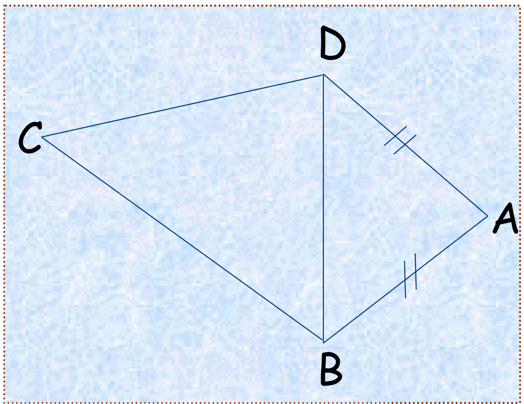
الشكل abcd شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. إذن الشكل abcd متوازي أضلاع.

وهذه الاستراتيجية تقترح وسيلة لإثبات تقرير b عن طريق إيجاد جملة شرطية تكون b نتيجة فيها، ثم نحاول إثبات أن المقدمة صواب؛ وينتج من ذلك صواب النتيجة b.

Mohammed_nh@yahoo.com

(03) استراتيجية برهنة سلسلة من الفروض:

نستطيع في بعض الأحيان اكتشاف كيفية برهنة فرض a بالتحقيق من أننا نستطيع برهنته إذا استطعنا برهنة فرض آخر x، ولسبب ما فإننا نعلم أن x صواب، عندئذ يمكن إتمام البرهان.



فمثلاً في الشكل التالي:

AD=AB، ADC=ABC فأثبت أن BC=DC؟

البرهان:

إننا نقول أنه يمكننا إثبات أن BC=DC إذا استطعنا إثبات أن BDC=DBC

وبما أن ABC=ADC

إذن يمكننا إثبات أن BDC=DBC إذا أمكننا إثبات أن ADB=ABD

ويمكننا إثبات أن ADB=ABD إذا أمكننا إثبات أن AB=AD ولكن AB=AD معطى.

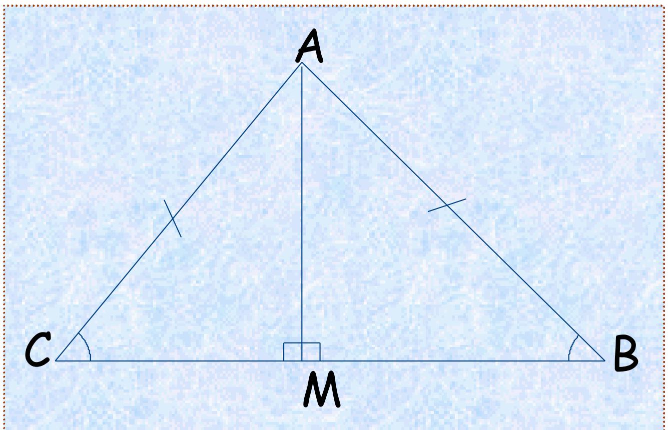
إذن ADB=ABD و BDC=DBC و BC=DC

ونستطيع بقليل من الملاحظة أن نرى أن هذه الاستراتيجية تطبيق متكرر لاستراتيجية فصل المقدمة.

(04) استراتيجية إثبات جملة شرطية:

هناك أكثر من طريقة لإثبات جملة شرطية $a \to b$

- **الأولى:** أن نفرض صواب المقدمة ثم صواب النتيجة، فمثلاً لإثبات الفرض " إذا كان مثلث متساوي الساقين فإن الزاويتين المقابلتين للضلعين المتساويين تكونان متساويتان ".



نفرض صواب المقدمة أي نفرض أن $ab \equiv ac$ ثم نستنتج صواب النتيجة من تطابق المثلثين.

- **الثانية:** بإثبات عكس معكوس النتيجة.

أي نحاول إثبات أن $\sim b \rightarrow \sim a$

فمـــثلاً لإثبات الفرض: " إذا قطع مستقيم مستقيمين، وكانت الزاويتين الداخلتان المتبادلتان متساويتان؛ كان الخطان متوازيان ".

نحـــاول إثـــبات عكـــس النتيجة أي إثبات أنه إذا لم يكن الخطان متوازيان فإن الزاويتان الداخليتان المتجاورتان غير متساويتان.

- **الثالـــثة:** محاولة إيجاد تقرير c بحيث يمكن إثبات أن $a \rightarrow c$ و $c \rightarrow b$ وهذا يعني أن $a \rightarrow b$ مباشرة.

إننا نستخدم هذه الطريقة عند حل معادلات جبرية.

(05) استراتيجية البرهان بنفي النقيض:

هـــذه الوسيلة للبرهان ليست صعبة ولكن كثيراً من طلبة الرياضيات لا يفهمونها – وهذا مقتبس من محاضرات طرق تدريس الرياضيات للأستاذ الدكتور / محفوظ يوسف صديق (حفظـــه الله) – ويظنون أن هناك شيئاً غير معقول بالنسبة لها، ومع ذلك فإنها وسيلة قوية وتستخدم باستمرار،

وتتكون هذه الاستراتيجية من افتراض صواب نقيض التقرير المطلوب إثباته؛ ثم إثبات أن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مثل $b \rightarrow \sim b$ وهذا بالضرورة خطأ.

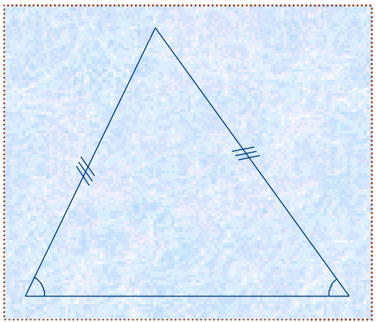
مثال: لإثبات أن أي مستقيمين مختلفين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط:

نفـــرض أن المستقيمين المختلفين l_1, l_2 يتقاطعان في أكثر من نقطة، إذن l_1, l_2 ينطبقان أي أنهما مستقيم واحد.

وهذا يعارض الفرض، إذن لا يمكن لمستقيمين أن يتقاطعا في أكثر من نقطة.

(06) استراتيجية البرهان بالتفنيد:

تعتمد هذه الاستراتيجية على تفنيد كل الحالات الممكنة لكي نستنتج الحالة الصواب.
مثال: " في المثلث المتساوي الساقين تكون الزاويتان المقابلتان للضلعين المتساويان متساويتان ".



في الشكل المقابل، إما أن تكون إحدى الزاويتين منفرجة، وهذا يؤدي إلى أن الضلع الذي يقابله زاوية أكبر في القياس يكون أكبر في الطول – وهذا يتعارض مع كون الضلعان متساويان.
وإما أن تكون إحدى الزاويتين قائمة، وأيضا سيتعارض هذا مع كون الضلعين متساويين.
وهذا يعني أنهما لابد أن يكونا حادتان.
وأيضاً لكي نتفق مع الشرط المعطي وهو أن الضلعين متساويان في الطول، فسنجد بالقياس أن الزاويتين المقابلتين متساويتين أيضاً.

(07) استراتيجية إثبات تكافؤ تقريرين أو أكثر:

إن تقرير التكافؤ عبارة عن تضمين مزدوج حيث إن $a \leftrightarrow b$ تعني $a \rightarrow b$ و $b \rightarrow a$ وكل منهما جملة شرطية، وعلى ذلك فأي استراتيجية تستخدم لإثبات جملة شرطية؛ يمكن استخدامها لإثبات تكافؤ التقارير،
مثال: أثبت أن المعادلة $7x+3=2x+18$ تكافئ المعادلة $3x=15$ ؟

(08) استراتيجية الاستنتاج الرياضي:

هذه الاستراتيجية يستخدمها طلاب المدارس الثانوية كثيراً بالرغم من أنهم لا يفهمونها عادةً،
فإننا مثلاً قد نجد كثيراً من الطلاب الذين يستطيعون برهنة نظريات مثل $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ باتباع القواعد المذكورة في الكتب المدرسية؛ وتقليد الأمثلة المعطاة، ومع ذلك فنادراً ما يفهم هؤلاء الطلاب منطق هذا النوع من البرهان.

Mohammed_nh@yahoo.com

والواقع أنه يمكن تفسير البرهان بهذه الطريقة كما يأتي:

نفرض أننا نريد برهنة سلسلة لا نهائية من الفروض الرياضية $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$، والتي تكون معاً فرضاً عاماً، ونفرض أنه عن طريق المناقشة الرياضية أمكن إيضاح أن:

- إذا كانت n عدداً صحيحاً وثبت أن x_n صواب؛ فإنه ينتج من ذلك أن $x_n + 1$ صواب أيضاً.
- أمكن إثبات أن الفرض x_1 صواب؛ فإنه ينتج من ذلك أن كل الفروض $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ صواب، وبذلك يكون الفرض العام X صواب.

فمثلاً لإثبات النظرية $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

نقول عندما n=1 فإن $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}=\sum_{1}^{\infty} n$ = الحد الأول، صواب.

إذن النظرية صحيحة عندما n=1.

نفرض صحة النظرية عندما n=r وهذا يعني أن $\sum_{1}^{\infty} r=\dfrac{r\cdot(r+1)}{2}$

إذن $\sum_{1}^{\infty}(r+1)=\dfrac{(r+1)\cdot[(r+1)+1]}{2}=\dfrac{(r+1)\cdot(r+2)}{2}$

وهذا يعني أن النظرية صحيحة في حالة n=r+1

(09) برهان الوجود:

مثال ذلك إثبات أن كل معادلة على الصورة $ax+b=0, a\neq 0$ لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، يكفي إثبات أن $x=-\dfrac{b}{a}$ هو عدد حقيقي.

(10) استراتيجية البرهان بالسرد:

وفيه نبرهن على صحة أحد الفروض بإثبات أنه صحيح في جميع الحالات، وتستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون عدد الحالات المراد فحصها نهائياً وقليل بدرجة معقولة.

مثال: أثبت أن العناصر (1,-1,y,-y) تكون مع عملية الضرب المعتادة مجموعة.

Mohammed_nh@yahoo.com